

استدلال استقرایی & استقرای ریاضی

با یکبار استفاده از ترازو، سه سکه مشخص می‌شود که سکه سنگین بین آن‌ها است. حال مشابه آنچه در مسئله قبل دیدیم، به سادگی با یکبار دیگر استفاده از ترازو می‌توانیم سکه سنگین تر را مشخص کنیم.

حالا به این نمونه توجه کنید:

- ۲۷ سکه مشابه داریم. چگونه می‌توانیم با سه بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای، یکی از آن‌ها را که از بقیه سنگین تر است، مشخص کنیم؟

احتمالاً ایده حل مسئله را از مسئله قبلی توانسته‌اید استخراج کنید! ۲۷ سکه را به سه دسته نه‌تایی تقسیم می‌کنیم. دو دسته را در دو کفه ترازو می‌گذاریم و با هم مقایسه می‌کنیم. اگر دو کفه برابر بودند، سکه سنگین تر در نه‌تای سوم است و اگر یکی از دو کفه پایین آمد، سکه سنگین تر بین نه سکه آن کفه است. پس با یکبار استفاده از



الف) سکه سنگین تر، کدام است؟!

معماهای مربوط به سکه‌ها و پیدا کردن سکه سنگین تر (یا سبک‌تر) در میان تعداد معینی سکه، از قدیمی‌ترین معماها با ماهیت ریاضی هستند و قدمت آن‌ها به حداقل پنج قرن پیش برمی‌گردد. با یک نمونه بسیار ساده شروع می‌کنم که خودم آن را در دوران دبیرستان شنیده بودم:

- هشت سکه مشابه داریم که یکی از آن‌ها کمی از بقیه سنگین تر است. چگونه می‌توانیم با دوبار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای، این سکه را مشخص کنیم؟

توصیه می‌کنم در این مورد و موارد بعدی، ابتدا خودتان خوب روی مسئله تمرکز کنید و بکوشید آن را خوب بفهمید و تجزیه و تحلیل کنید. تلاش کنید خودتان آن را حل کنید و بعد به راه حل مراجعه کنید. اگر کمی به مسئله اندیشیده باشید، راه حل آن را ساده می‌یابید: شش تا از سکه‌ها را به دو بخش سه‌تایی تقسیم می‌کنیم و هر سه سکه را در یک کفه قرار می‌دهیم. اگر دو کفه برابر باشند، سکه سنگین بین دو سکه دیگر است و با قرار دادن دو سکه در دو کفه ترازو در مرحله دوم، سکه سنگین مشخص می‌شود. اما اگر یکی از دو کفه پایین بیاید، سکه سنگین بین سه سکه این کفه است. حال کافی است دو تا از این سه سکه را در دو کفه ترازو بگذاریم. اگر دو کفه برابر شوند، سکه سنگین، سکه سوم است و اگر یکی از دو کفه پایین آمد، سکه سنگین در همان کفه است.

حال به یک نمونه دیگر توجه کنید:

- نه سکه مشابه داریم که یکی از آن‌ها کمی از بقیه سنگین تر است. چگونه می‌توانیم با دوبار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای، سکه سنگین تر را مشخص کنیم؟ (باز هم قبل از مراجعه به راه حل، خوب فکر کنید!)

بله، باز هم کار چندان دشواری نیست! کافی است سکه‌ها را به سه دسته سه‌تایی تقسیم کنید. دو دسته سه‌تایی را در دو کفه ترازو بگذارید. اگر برابر بودند، سکه سنگین تر در میان سه سکه سوم است و اگر یکی از دو کفه پایین آمد، سکه سنگین تر در آن کفه است. پس



همه دستوراتش را به همه که در یکجا جمع می‌شوند و او و یکدیگر را می‌بینند، ابلاغ می‌کند.

یک روز صبح رئیس قبیله رو به همه گفت: «در جمع شما عده‌ای هستند که روی پیشانی‌شان علامتی هست! آن‌ها هر چه زودتر بروند و خودکشی کنند!»

البته این دستوری غیرمنطقی است! ولی خب این جزیره فرضی هم عجیب است، همان‌طور که نداشتن ارتباط کلامی و اشاره‌ای و نبود آینه و وسایل مشابه هم به قدر کافی عجیب است! اما به هر حال افراد ایسن قبیله مطیع بی‌چون و چرای رئیس خود بودند و یک ماه (سی روز) بعد عده‌ای رفتند و خودکشی کردند. آن‌ها چند نفر بودند؟ چرا یک ماه بعد این کار را کردند؟ و از همه مهم‌تر، از کجا متوجه وجود علامت روی پیشانی‌شان شدند؟ این بار باید بیشتر روی مسئله متمرکز شوید و خوب فکر کنید!

تصور اینکه عده‌ای بدون داشتن هرگونه وسیله ارتباطی و کلامی و بدون داشتن آینه (و ابزار مشابه آن) بتوانند فقط با نگاه کردن، به وجود علامتی روی پیشانی خود پی ببرند کاملاً عجیب است! اما غیرممکن نیست. بیاید باز هم به مسئله نگاهی استقرایی داشته باشیم. یعنی مسئله را از جزء شروع کنیم و به کل برسیم.

فرض کنید فقط یک نفر در میان افراد قبیله روی پیشانی‌اش علامت داشته باشد. چه اتفاقی می‌افتد؟ او می‌بیند که همه افراد قبیله پاک هستند و علامتی ندارند، پس چه نتیجه‌ای می‌گیرد؟ واضح است که فوراً می‌فهمد که خودش بر پیشانی علامت دارد و در نتیجه همان روز اول خودکشی می‌کند.

حالا فرض کنید دو نفر بر پیشانی علامت داشته باشند. چه می‌شود؟ روز اول هر یک از این دو نفر می‌بیند که همه افراد به جز یک نفر، روی پیشانی علامت ندارند. پس طبق بحث قبلی، استنتاج

ترازو، نه سکه‌ای که سکه سنگین در میان آن‌هاست، معلوم می‌شوند. حال با توجه به مسئله قبل، با دوبار استفاده از ترازو می‌توانیم سکه سنگین را از میان این نه سکه جدا کنیم. پس در مجموع کافی است سه بار از ترازو استفاده کنیم!

حالا دیگر احتمالاً به سادگی می‌توانید به این پرسش پاسخ دهید:

- ۸۱ سکه مشابه داریم که یکی از آن‌ها از بقیه سنگین‌تر است. چگونه می‌توانیم با چهار بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای، سکه سنگین‌تر را مشخص کنیم؟ اگر ۲۴۳ سکه داشته باشیم، کافی است چند بار از ترازوی دو کفه‌ای استفاده کنیم؟ اگر ۳ⁿ سکه داشته باشیم چطور؟

فرایندی که در این مسئله دیدیم، اصطلاحاً فرایندی «استقرایی» است. در این فرایند ما یک «الگو» یا نظم را مشاهده می‌کنیم و آن را «تعمیم» می‌دهیم. مثلاً دیدیم که اگر ۳^۱ یک سکه داشته باشیم، با یک بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای می‌توانیم سکه سنگین‌تری را که بین آن‌هاست، مشخص کنیم. اگر ۳^۲ سکه داشتیم، با دو بار و اگر ۳^۳=۲۷ سکه داشتیم، با سه بار و در مورد ۳^۴=۸۱ سکه با چهار بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای به مقصود خود می‌رسیم. پس نتیجه می‌گیریم که «به‌همین ترتیب» اگر ۳ⁿ سکه داشته باشیم، با n بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای می‌توانیم سکه سنگین‌تر را مشخص کنیم.

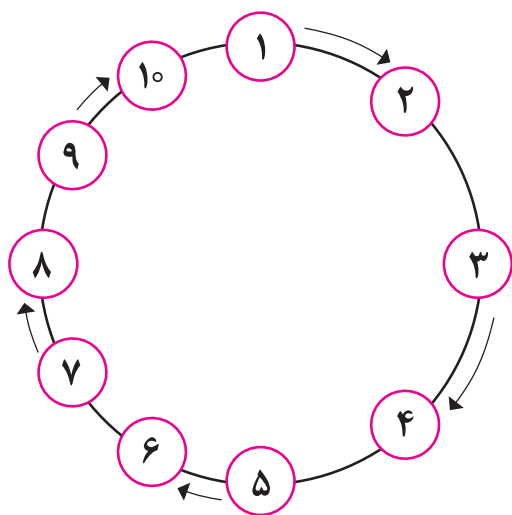
نکته‌ای که در این فرایند به خوبی قابل درک است و حتماً شما هم متوجه آن شده‌اید، این است که در هر مرحله از یافتن الگو، از نتیجه مرحله قبل استفاده می‌شود. یعنی مثلاً وقتی ۸۱ سکه داشتید، آن‌ها را به سه دسته ۲۷ تایی تقسیم کردید و با یک بار استفاده از ترازو، ۲۷ سکه‌ای را که سکه سنگین‌تر در میان آن‌ها بود، پیدا کردید و با توجه به نتیجه‌ای که در مورد ۲۷ سکه می‌دانستید، توانستید نتیجه بگیرید که چهار بار استفاده از ترازو کافی است.

این فرایند در مسائل زیادی از ریاضیات مشاهده می‌شود. به‌همین دلیل استقرا را «رسیدن از جزء به کل» نامیده‌اند؛ یعنی مشاهده نظم در یک جزء (مجموعه کوچک) و تعمیم آن به کل (همه اعضا).

اکنون بیایید با هم به یک جزیره گمنام و عجیب و غریب برویم!

ب) جزیره گنگ‌ها!

در یک جزیره دوردست، هیچ کس نمی‌تواند سخن بگوید و هیچ نوع ارتباط کلامی و یا اشاره‌ای بین هیچ دو شهروندی وجود ندارد. همچنین هیچ وسیله‌ای که افراد خودشان را در آن ببینند (مانند آینه و اجسام شفاف دیگر) وجود ندارد. تنها و تنها رئیس این قبیله می‌تواند با زبان مخصوص خودش با همه صحبت کند. او هر روز صبح یک بار




حالا همین مسئله را برای وقتی که عدد تیراندازان ۲ نفر، ۳ نفر، ۴ نفر و... و ۲۰ نفر باشد حل کنید و جدول زیر را کامل کنید:

عدد نفرات	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰
شماره آخرین نفر که زنده مانده است	۱	۳	۱	۳	۵

در کدام حالت‌ها، اولین نفری که شلیک کرده، همان کسی است که زنده مانده است؟ (یعنی نفر شماره ۱ زنده مانده است.) آیا می‌توانید یک حدس استقرایی بزنید؟

پرسشی که در انتها مطرح می‌کنیم و البته بسیار اهمیت دارد این است که: «آیا حدس‌های استقرایی همواره معتبر هستند؟» یعنی آیا الگوهایی که کشف می‌کنیم و تعمیم‌هایی که می‌دهیم، همیشه درست هستند و ما را به نتایج درستی می‌رسانند؟ پاسخ به این پرسش را به شماره بعد مokol می‌کنیم.



به جای علامت‌های سؤال چه اعدادی قرار می‌گیرند؟

۱۵، ۵، ۸، ۲۴، ۲۱، ۷، ۱۰، ۳۰، ؟، ؟، ؟، ۳۶، ۳۳

□ □ □

پاسخ‌ها در صفحه ۴۸ درج شده است.



می‌کند که اگر خودش علامت نداشته باشد، نفر دیگر باید همان روز اول خودکشی کند. پس هر کدام یک روز صبر می‌کنند. وقتی در روز دوم یکدیگر را می‌بینند، فوراً می‌فهمند که هر دو علامت دارند! و آن روز باید خودکشی کنند. (البته بقیه افراد در روز اول می‌بینند که دو نفر علامت دارند، پس بیشتر صبر می‌کنند.)

حالا اگر سه نفر دارای علامت باشند چه می‌شود؟ هر یک از این سه نفر دو نفر را دارای علامت و بقیه را بدون علامت می‌بینند. پس هر کدام (طبق بحث قبلی) دو روز صبر می‌کنند تا اگر فقط آن دو نفر علامت داشتند، روز دوم خودکشی کنند. اما وقتی در روز سوم یکدیگر را می‌بینند، مطمئن می‌شوند که خودشان هم علامت دارند و در نتیجه در روز سوم خودکشی می‌کنند.

حالا حتماً می‌توانید بگویید که چرا اگر چهار نفر علامت داشته باشند، روز چهارم همه با هم خودکشی می‌کنند و به همین ترتیب اگر پنج نفر علامت داشته باشند... و در حالت کلی، اگر n نفر علامت داشته باشند، روز n م خودکشی می‌کنند. پس وقتی عده‌ای روز سی‌ام خودکشی کرده‌اند، حتماً ۳۰ نفر بوده‌اند.

اکنون که با فرایندهای استقرایی آشنا شده‌اید، این مسئله را خودتان حل کنید:

● فرض کنید عده‌ای تیرانداز دور یک دایره بزرگ ایستاده‌اند و با یک فرمان شروع، همه در یک جهت (مثلاً جهت حرکت عقربه‌های ساعت) به ترتیب به نفر بعدی شلیک می‌کنند و پس از یک دور، این کار را ادامه می‌دهند تا وقتی که فقط یک نفر زنده بماند. مثلاً اگر آن‌ها ۱۰ نفر باشند، مطابق نمودار مقابل ابتدا ۱ به ۲، ۲ به ۳، ۳ به ۴، ۴ به ۵، ۵ به ۶، ۶ به ۷، ۷ به ۸ و ۸ به ۹ به ۱۰ شلیک می‌کند و در نتیجه نفرات ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ زنده می‌مانند. سپس ۱ به ۳، ۳ به ۵، ۵ به ۷ و ۷ به ۹ شلیک می‌کند و بعد ۵ به ۹ شلیک می‌کند و در نهایت ۵ زنده می‌ماند.